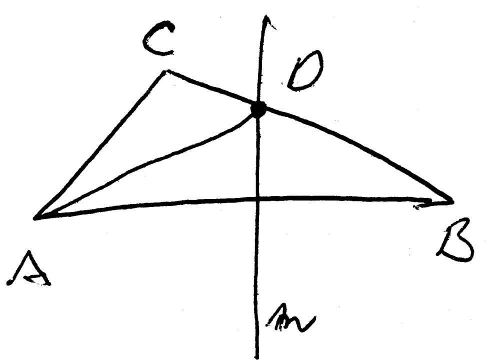
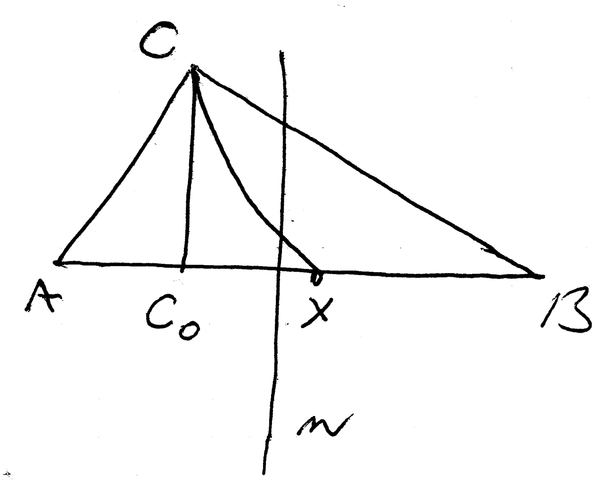
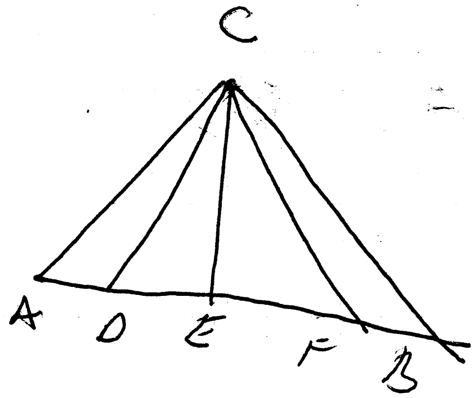
GLAVA 7

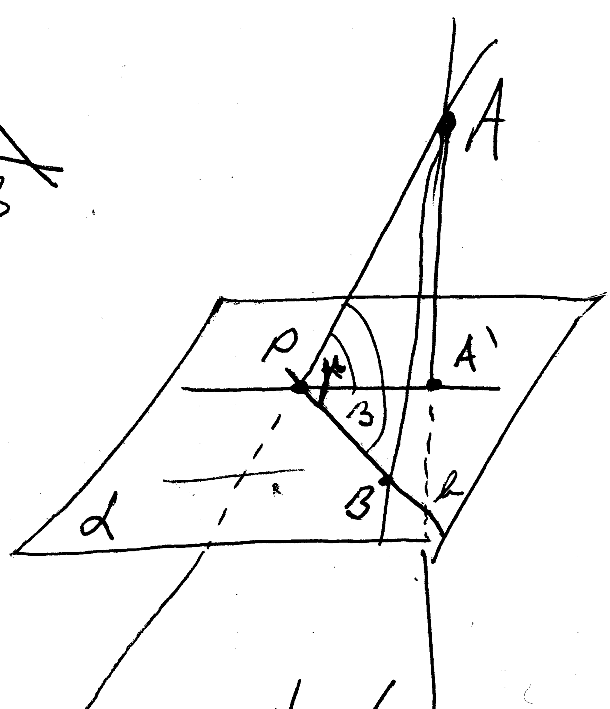
Figure u prostoru i konstruktivni zadaci

O dužima i njihovim projekcijama









Uočimo duž AB i simetralu m te duži. Neka je C bilo koja tačka u ovoj ravni. U odnosu na pravu m

tačka C može imati jedan od sljedeća
tri slučaja:

1. $C \in m$
2. tačka C je sa one strane prave m sa koje je tačka A, u tom slučaju kažemo da je tačka C bliža tački A nego tački B.
3. tačka C je sa one strane prave m sa koje je tačka B. U tom slučaju kažemo da je tačka C bliža tački B nego tački A.

U slučaju 1 znamo da je $AC \cong BC$.
Razmotrimo slučaj 2. Pošto je tačka C sa iste strane prave m sa koje je tačka A to prava m siječe duž BC u nekoj tački D.
Sada je $AC < AD + DC = BD + DC = BC$.
Dakle ako je tačka A bliža tački C nego tačka B onda je $AC < BC$.
U trećem slučaju potpuno analogno dokazali bi da je $BC < AC$.
Na taj način mi smo dokazali sljedeću
<u>teoremu:</u>
Neka su u ravni α date dvije tačke A i B.
a) Skup svih tačaka ravni od kojih je svaka jednako udaljena od tačaka A i B je simetrala duži AB.
b) Skup svih tačaka od kojih je svaka bliža tački A nego tački B je otvorena poluravan čija je ivica simetrala m a u kojoj je tačka A.
c) Skup svih tačaka od kojih je svaka bliža

tački B nego tački A je otvorena poluravan čija je ivica prava m a u kojoj je tačka B.
Kao neposrednu <u>posljedicu</u> imamo: Ako tačka C ne pripada simetrali m duži AB onda ona nije jednako udaljena od krajeva A, B te duži.
Za duži koje imaju jedan kraj zajednički a druga dva kraja im pripadaju pravoj koja ne sadrži zajednički kraj zovemo dužima između tačke i prave. Ako je C_0 normalna projekcija tačke C na pravu AB onda su duži AC_0 i BC_0 projekcije duži AC i BC na pravu AB.
Tačke A i B su same svoje projekcije.
Pošto je $m \perp AB$ i $\underline{CC_0} \perp AB$ to je prava $\underline{CC_0} \parallel m$ pa ako je tačka C bliža tački A nego tački B to je i njena normalna projekcija bliža tački A nego tački B.
Ako C pripada simetrali onda zbog jedinstvenosti normale u tački C i onda tačka C_0 pripada simetrali. Na taj način mi smo dokazali slijedeću <u>teoremu</u>:
Za dvije duži koje imaju jedan kraj zajednički i za njihove projekcije na pravu kojoj pripadaju druga dva kraja tih duži vrijedi:

a.) Podudarne duži imaju podudarne projekcije i obratno

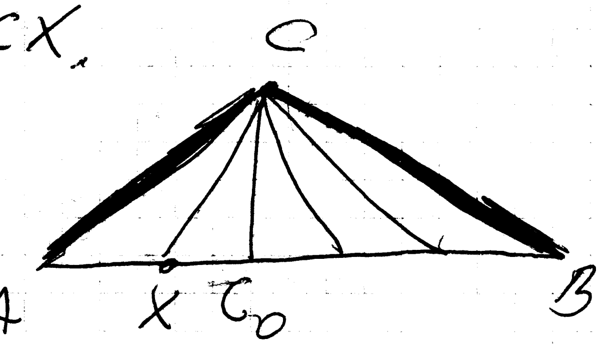
b.) Veća duž ima veću projekciju i obrnuto

Uočimo tačku C i dvije tačke A i B tako da C nepripada pravoj AB. Neka je X proizvoljna tačka duži AB i C_0 normalna projekcija tačke C na pravu AB. Mogu se dogoditi ova tri slučaja:

1) $C_0 \equiv X$

Tada je $CX < CA$ i $CX < CB$ kao katete pravouglih trouglova:

$\triangle ACX$ i $\triangle BCX$.



2.) $A \cdot X \cdot C_0$

3.) $C_0 \cdot X \cdot B$

U drugom slučaju iz pravila za uspoređivanje duži slijedi da je $C_0X < C_0A$ a onda prema posljednjoj teoremi je i $CX < CA$.

U trećem slučaju analogno se dokaže da je $CX < CB$.

Na taj način mi smo dokazali slijedeću teoremu: Maksimum skupa svih duži koje spajaju datu tačku sa tačkama date duži je jedna od dvije duži koje spajaju tu tačku sa tačkama date duži.

Uočimo sada ravan α i tačku A koja $A \notin \alpha$. Neka je A' normalna projekcija tačke A na ravan α. Neka je a prava koju sadrži tačku A i siječe ravan α u nekoj tački P ali nije normalna na tu ravan. Tada je prava PA' normalna projekcija prave a na ravan α.

Definicija:

Nagibni ugao prave prema ravni je ugao koji ta prava čini sa svojom normalnom projekcijom na tu ravan.

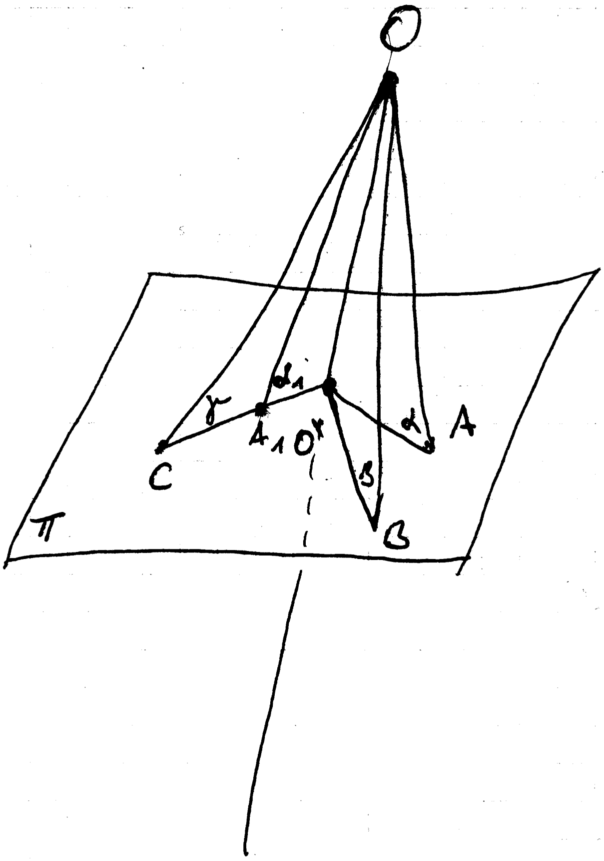
Teorema:

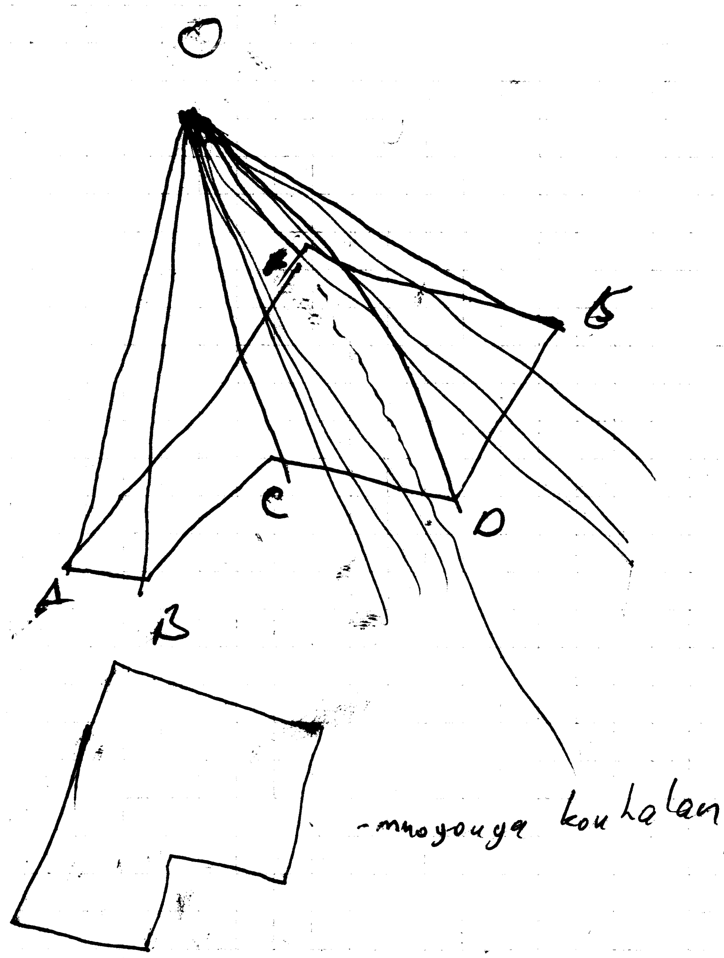
Nagibni ugao prave prema ravni manji je od svih uglova koje ta prava čini sa drugim pravima u ravni.

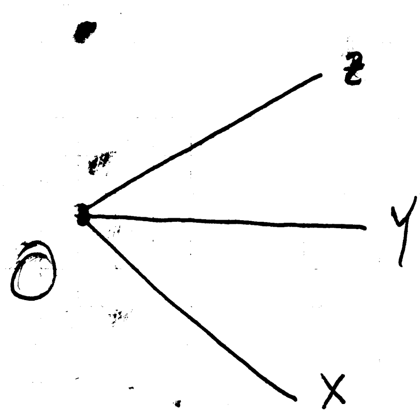
Dokaz:

Ugao $\measuredangle APA'$ je nagibni ugao prave a prema ravni α. Označimo ga kraće sa φ. Neka je b bilo koja prava u ravni α koja prolazi kroz tačku P. Ugao između pravih a i b označimo sa β. Uzmimo na pravoj b tačku B tako da je $PA' \cong PB$. Pošto je A' normalna projekcija tačke A na ravan α to je $AA' < AB$. U trouglovima $\triangle AA'P$ i $\triangle ABP$ je AP zajednička strana $PA' \cong PB$ i $AA' < AB$. Kako naspram manje strane leži manji ugao slijedi da je $\varphi < \beta$.

Ako prava b ne prolazi kroz tačku P mi jednostavno uzmemo pravu koja prolazi kroz tačku P a paralelna je pravoj b.







~~OABC~~

Uočimo jednu ravan π i tačku O koja ne pripada ravni π. Neka je O' normalna projekcija tačke O na ravan π i A, B, C,.... proizvoljne tačke na ravni π. Za duži OA, OB, OC... itd kažemo da su kose duži u odnosu na ravan π. Duži O'A, O'B i O'C su projekcije duži OA, OB, OC na ravan π. Dokazaćemo sljedeću <u>teoremu</u>: Za kose duži koje spajaju tačku O koja ne pripada ravni π sa tačkama ravni π, i za njihove projekcije na ravan π vrijedi:

a) Jednake duži imaju jednake projekcije i obrnuto
b) Veća duž ima veću projekciju i obrnuto
c) jednake duži imaju jednake nagibne uglove i obrnuto
d) veća duž ima manji nagibni ugao i obrnuto

<u>Dokaz:</u> Tvrdnje a) i c) očito je da slijede iz podudarnosti trouglova $\triangle OO'A$ i $\triangle OO'B$. To su pravougli trouglovi koji su podudarni po raznim pravilima podudarnosti (u zavisnosti od postavljenih pretpostavki). Za tvrdnju b) najprije ćemo dokazati obrnuti stav. Pretpostavimo da je $O'C$ veće od $O'A$. Tada na duži $O'C$ postoji tačka $O'A$ tako da je $O'A \cong O'A_1$. Sada su pravougli trouglovi $\triangle OO'A$ i $\triangle OO'A_1$ podudarni jer su im podudarne dvije katete. Otuda slijedi podudarnost svih odgovarajućih elemenata pa i $OA \cong OA_1$ i $\measuredangle OAO' \cong \measuredangle OA_1O'$. Ugao $\measuredangle OA_1O'$ je oštar ugao pa je njemu naporedni ugao tupi ugao. Prema tome u $\triangle OA_1C$ najveća stranica je OC i dobivamo $OC > OA_1 \cong OA$ što je i trebalo dokazati. Pretpostavimo sada da je $OC > OA$ tvrdimo da je $O'C > O'A$. Pretpostavimo da naša tvrdnja nije tačna. Tada je $O'C \cong O'A$ ili je $O'C < O'A$. Prema dokazanom dijelu teorema odavde slijedi $OC \cong OA$ ili $OC < OA$ u

svakom slučaju kontradikcija pretpostavci. Pri dokazivanju obrnutog stava b) mi smo usput dokazali da većoj duži odgovara manji nagibni ugao. Naime ugao OA_1O' je vanjski ugao za trougao $\triangle OCA_1$ pa je $\measuredangle O'A_1O > \measuredangle OCO'$ a budući je $\alpha = \alpha_1 > \gamma$. Obrnuti stav od d) dokazuje se indirektno.

Rogalj, triedar

U nekoj ravni π uočimo mnogougao ABCDEF tačku O koja nepripada toj ravni i polupravce čija je početna tačka O a koje prolaze kroz tačke stranica toga mnogougla. Unija svih tih polupravih čini figuru koja se sastoji od više konveksnih uglova:

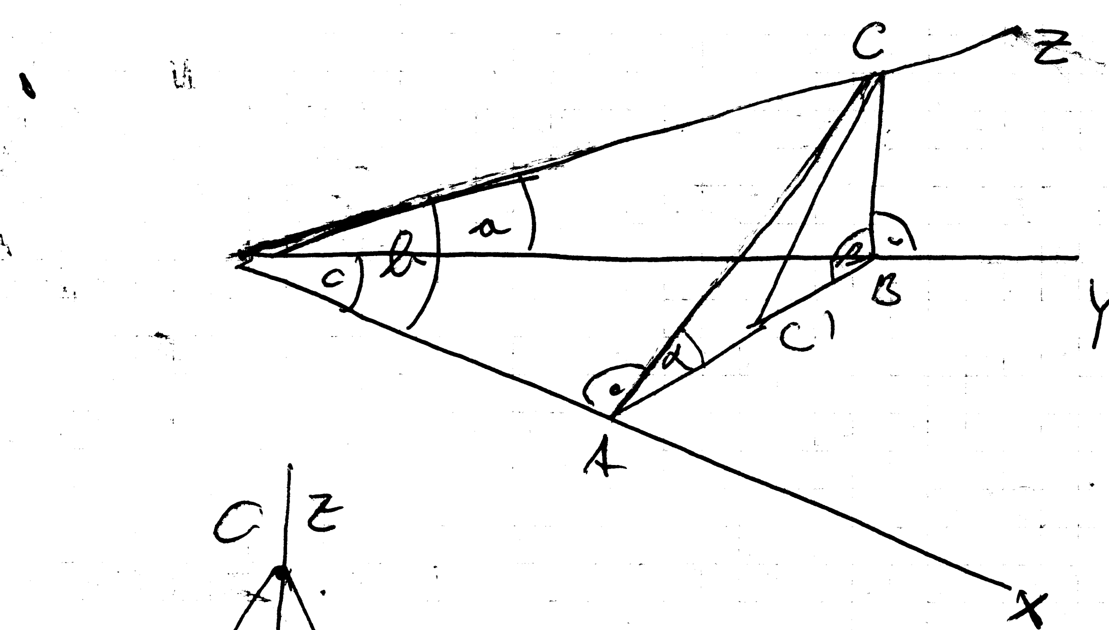
$\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$, $\measuredangle DOE$, $\measuredangle EOF$ i $\measuredangle AOF$.

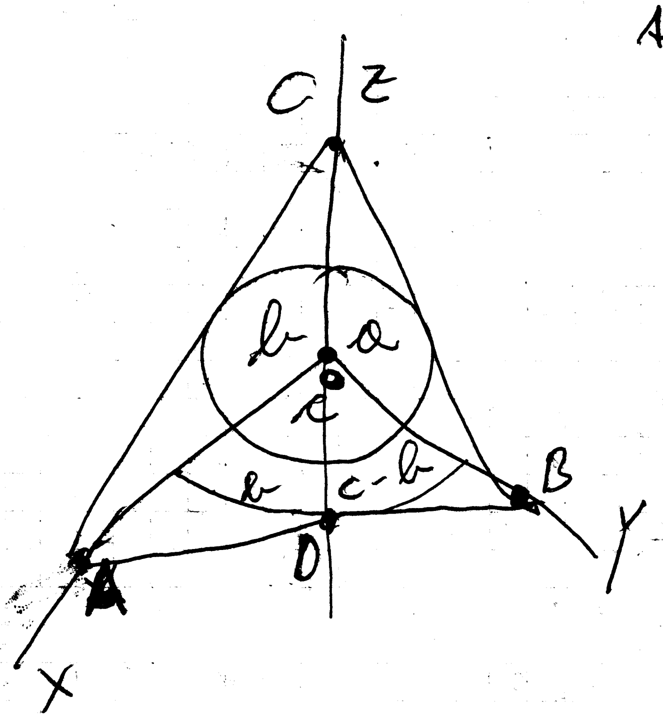
Svi ti uglovi imaju zajedničko vrh O i dva susjedna ugla imaju zajedničko krak i ne leže u istoj ravni. Osim toga nesusjedni uglovi osim zajedničkog vrha O nemaju drugih zajedničkih ~~tačaka~~. Ovakvu figuru zovemo rogalj. Zajedničko vrh je vrh roglja. Uglovi su strane roglja, a zajednički kraci su ivice roglja. U našem slučaju rogalj se označava O ABCDEF.

Prema broju strana rogalj se zove trostrani,

četverostrani, peterostrani itd. najmanje broj
Uočimo ravan koja sadrži bilo koju stranu
roglja. Ako su svi ostali elementi roglja
sa iste strane ~~tog roglja~~ te ravni za rogalj
kažemo da je konveksan. Ako to ne
vrijedi tak za jednu ravan koja sadrži
jednu stranu roglja, rogal nije konveksan.
U našem primjeru rogalj nije konveksan
a treba uočiti da ni mnogougao ABCDEF
nije konveksan. Uočimo dvije susjedne strane
roglja, npr. ∢AOB i ∢BOC. One određuju
jedan dijedar kojem mu je ivica prava BO.
U jednoj strani dijedra je tačka A a
u drugoj tačka C. Taj dijedar označavamo
sa A°BO°C.
Strane roglja kao uglovi mjere se stepenima.
Očito je da je zbir svih strana roglja
manji od punog ugla. Rogalj mora imati
najmanje tri strane. Rogalj koji ima tri
strane zovemo triedar. Obično ga označavamo
ovako O°XYZ. Ako je OX⊥OY,
OX⊥OZ i OY⊥OZ onda je triedar
pravougli. Uopšte, za rogalj kažemo da
je pravilan ako su sve njegove strane
podudarne i svi njegovi diedri podudarni.
Triedar je figura u prostoru koja u
potpunosti odgovara trouglu u ravni. Ako
strane triedra odgovaraju stranicama
trougla a diedri triedra odgovaraju

uglovima trougla onda vrijedi teorema:
U triedru i
a) naspram jednakih strana leže jednaki diedri
b) naspram jednakih diedara leže jednake strane
c) naspram većeg diedra leži veća strana
d) naspram veće strane leži veći diedar





$AB < AC + BC$

$AB - AC < BC$

Dokaz: uočimo triedar OXYZ i na ivici OZ proizvoljnu tačku C. Neka je C' normalna projekcija tačke C na ravan XOY. Ugao ∢XOY označimo kraće sa c. Neka su A i B projekcije tačke C na OX odnosno OY. Uglove ∢XOZ i ∢YOZ označimo kraće

sa b i a. Sada su glavi $\measuredangle CAC'$ i $\measuredangle CBC'$ prvo nagibni uglovi duži AC i BC prema ravni XOY i drugo uglovi normalnih presjeka dijedera $Z^{\circ}OX^{\circ}Y$ $X^{\circ}OY^{\circ}Z$.
Vodimo pravougle trouglove $\triangle OAC$ i $\triangle OBC$. Ako je u tim trouglovima $a=b$ pošto imaju zajedničku hipotenuzu slijedi da je tada $AC \cong BC$. Prema naprijed dokazanoj teoremi slijedi da je $\alpha \cong \beta$. Očito je da vrijedi i obrnuto. Prema tome tvrdnje a) i b) naše teoreme simbolički zapisujemo ovako:

$$a \cong b \Leftrightarrow \triangle OAC \cong \triangle OBC \Leftrightarrow$$

$$AC \cong BC \Leftrightarrow \alpha \cong \beta$$

Pretpostavimo sada da je $\beta > \alpha$. Dokazali smo da većem nagibnom uglu odgovara manja duž pa je onda $BC < AC$. U trouglu $\triangle OAC$ je $\sin b = \frac{AC}{OC}$ a u trouglu $\triangle OBC$ je $\sin a = \frac{BC}{OC}$. Odavde i $BC < AC$ dobijamo

$$OC \sin a < OC \sin b$$

Pošto su a i b uglovi pravouglih trouglova to iz $\sin a < \sin b \Rightarrow a < b$

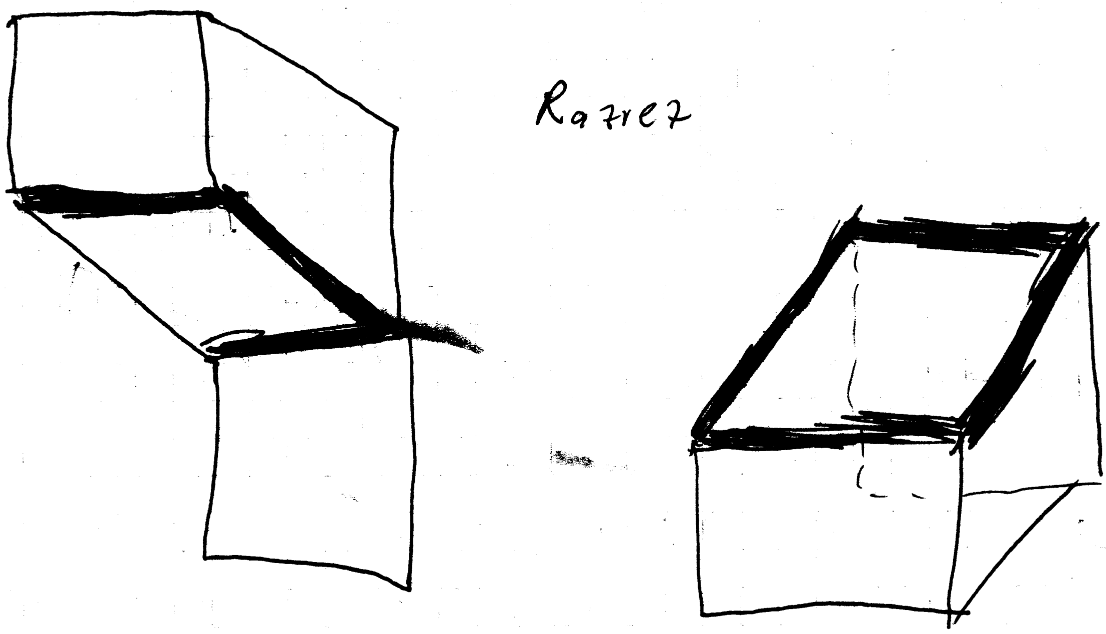
tj. $b > a$. Očito je da vrijedi i obrnuta tvrdnja.

<u>Teorema:</u> Jedna strana trjedra manja je od zbira a veća od razlike druge

druge strane triedra.[20] Uočimo opet triedar $O^{\bullet}XYZ$ i pretpostavimo npr. da je ugao $\angle XOY > \angle XOZ$. To znači da u uglu $\angle XOY$ postoji poluprava $\overline{OU}$ tako da je ugao $\angle XOU \cong \angle XOZ$. Neka su A i B proizvoljne tačke na polupravim OX i OY. Uglove $\angle XOY$, $\angle XOZ$ i $\angle YOZ$ označimo kraće sa c, b i a redom. Poluprava OU siječe duž AB u nekoj tački D. Na ivici OZ uzmimo tačku C tako da je $OC \cong OD$. Zbog učinjenih pretpostavki je $\angle AOC \cong b$ a ugao $\angle BOD \cong c-b$. Uočimo sad trouglove $\triangle AOC$ i $\triangle AOD$. U tim trouglovima je OA zajednička strana, $OC \cong OD$ i uglovi između podudarnih strana su podudarni. Otuda slijedi da je $AC \cong AD$. Uočimo sada trougao $\triangle ABC$. Prema poznatoj teoremi o stranama trougla je $AB < AC + BC$ tj. $AB - AC < BC$. S druge strane je $AB = AD + DB$ tj. $BD = AB - AD = AB - AC$ odnosno $BD < BC$. Na kraju uočimo trouglove $\triangle OBC$ i $\triangle OBD$. U tim trouglovima OB je zajednička strana i $BD < BC$. Naspram manje strane leži manji ugao pa slijedi da je $c - b < a$ tj. $c < a + b$. Potpuno analogno dokaže se da je $a < b + c$ i $b < a + c$, što je i trebalo dokazati.

Poliedarske površine

(POLIEDARI)



Pošto se pojam poliedarske površine odnosno poliedra različito definiše kod raznih autora to ćemo najprije razmotriti ove pojmove kako bi se vidjelo u kojem smislu se oni kod nas koriste.
Za dva mnogougla koji imaju jednu stranicu zajedničku i leže u raznim ravninama kažemo da su susjedni.
Za skup mnogouglova reći ćemo da je povezan ako je za bilo koja dva mnogougla tog skupa, postoji niz mnogouglova iz tog skupa, tako da je svaki mnogougao u nizu susjedan sa slijedećim mnogouglom niza.
Skup mnogouglova koji je povezan i takav da je stranica svakog mnogougla stranica najviše još jednog mnogougla koji ne leži sa prvim u istoj ravni

zovemo poliedarsku površ.
Mnogouglovi se zovu stranice poliedarske površi, vrhovi mnogouglova zovu se vrhovi poliedarske površi a stranice mnogouglova zovu se ivice poliedarske površi.
Ivicu poliedarske površi koja je zajednička stranica dvoju strana zovemo unutrašnjom ivicom. Ostale ivice zovemo rubnim ivicama. Skup svih rubnih ivica zovemo rubom. Poliedarsku površ koja nema ruba zovemo zatvorenom.
Ako dvije nesusjedne strane poliedarske površi nemaju zajedničkih tačaka za površ ćemo reći da je prosta. Prostu zatvorenu poliedarsku površ zovemo poliedrom.
Ako se u odnosu na svaku ravan koja sadrži stranu poliedra svi ostali elementi nalaze sa iste strane te ravni za poliedar ćemo reći da je konveksan.
Ako se elementi poliedra nalaze sa raznih strana bar jedne takve ravni poliedar je nekonveksan.
Razrez poliedarske površi je svaka prosta izlomljena linija čiji krajevi leže na rubu površi, a stranice su joj unutrašnje ivice površi.
Kod poliedra razrezom zovemo svaku prostu izlomljenu liniju čije su stranice ivice te površi.

Razrez dijeli poliedar na dva dijela ako se poliedar može rastaviti u dva skupa mnogouglova tako da je nemoguće polazeći od bilo kojeg mnogougla jednog skupa ići po poliedru doći do bilo kojeg mnogougla drugog skupa ne prelazeći ~~razrez~~ razrez. Ako svaki razrez dijeli poliedarsku površ na dva dijela kaže se da je ta površ jednostruko povezana, a za poliedar da je nultog roda.
Ako postoji bar jedan razrez koji ne dijeli poliedarsku površ na dva dijela reći ćemo da je ta površ višestruko povezana a za poliedar da je višeg roda od nultog. Sada ćemo dokazati poznatu Ojlerovu teoremu o poliedrima:

<u>Teorema</u>

a) Ukupan broj v vrhova i s strana jednostruko povezane poliedarske površi je za 1 veći od broja njegovih ivica:

$s+v-i=1$

b) Ukupan broj v vrhova i s strana poliedra nultog roda je za 2 veći od njegovih ivica:

$s+v-i=2$

<u>Dokaz:</u>

Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom. Neka je $s=2$ tj. neka se jednostruko povezana poliedarska površ sastoji iz dvije strane. Neka jedna strana ima p stranica a druga q stranica. Pošto se dva vrha jedne i druge strane poklapaju i pošto se jedna ivica i jedne i druge strane poklapaju to je: $v = p + q - 2$

$i = p + q - 1$. Sada je:

$$s + v - i = 2 + p + q - 2 - (p + q - 1) =$$

$$= p + q - p - q + 1 = 1$$

Za slučaj $s = 2$ teorema je dokazana.
Neka je sada $s > 2$. Po pretpostavci radi se o jednostruko povezanoj poliedarskoj površi pa uzmimo na toj površi proizvoljan razrez L koji je prosta izlomljena linija koja ima k stranica. Ona tada ima $k+1$ vrhova. Razrez L dijeli jednostruko povezanu poliedarsku površ na dvije također jednostruko povezane poliedarske površi kod kojih su s_1 i s_2 brojevi strana, v_1 i v_2 vrhovi a i_1 i i_2 ivice. Za ove dvije jednostruko povezane poliedarske površi vrijedi indukciona pretpostavka pa je $s_1 + v_1 - i_1 = 1$ i $s_2 + v_2 - i_2 = 1$. Sabirajem ovih jednakosti dobivamo $\underline{s_1 + s_2 + v_1 + v_2 - (i_1 + i_2) = 2}$ (*)
Vezu između s_1, s_2 i s znamo. Naime $s_1 + s_2 = S$. Dalje, pošto se k ivica poklapaju i $k+1$ vrhova poklapaju to je $v_1 + v_2 = v + k + 1$

a $i_1+i_2=i+k$. Uvrštavajući sve ovo u (*) dobijamo:

$$s+v+k+1-(i+k)=2 \quad \text{odnosno}$$

$$s+v+k+1-i-k=2$$

$$s+v-i=1$$ što je i trebalo da se dokaže.

Tvrdnja b) je direktna posljedica tvrdnji a). Naime, ako razrez učinimo po ivicama koje pripadaju jednoj strani ~~u~~ poliedra nultog roda i uklonimo tu stranu dobijamo jednostruko povezanu poliedarsku površ za koju vrijedi dokazana tvrdnja a). Ta površ ima $s-1$ ~~st~~ stranica pa vrijedi $s-1+v-i=1$ tj. $s+v-i=2$.

<u>Teorema:</u> Postoji samo pet pravilnih poliedara.

<u>Dokaz:</u> Ako je s broj strana v broj vrhova i i broj ivica poliedra nultog roda onda je $s+v-i=2$. Pretpostavimo da svaka strana ima p stranica. Pošto jedna ivica poliedra pripada dvama stranama to je $s \cdot p = 2i$. ~~Dalje~~ Dalje, pretpostavimo da iz svakog vrha izlazi k ivica. Svaka ivica je pridružena dvama vrhovima pa je $v \cdot k = 2i$. Dakle imamo tri jednadžbe

sa pet nepoznatih čija rješenja treba da budu prirodni brojevi. ~~ti~~ Kako svaki mnogougao ima najmanje tri stranice to je $p \geq 3$. Isto tako kako svaki rogalj ima najmanje tri ivice to je $k \geq 3$. Iz druge i treće jednačine dobijamo $s = \frac{2i}{p}$ i $r = \frac{2i}{k}$. Uvršavanjem u prvu jednačinu dobijamo:

$$\frac{2i}{p} + \frac{2i}{k} - i = 2$$

dijeleći sa $2i$ dobijamo:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2} = \frac{1}{i} \qquad \text{tj.}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i}$$ Odavde je $\frac{1}{p} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$ (1)

Iz (1) slijedi da jedan od brojeva p ili k mora biti manji od 4. Naime, ako bi istovremeno bilo $p \geq 4$ i $k \geq 4$ imali bi $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{4}$ tj.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

što je kontradiktorno sa (1).
Ako uzmemo npr. da je $p = 3$ onda uvršta

vanjem u (1) dobijamo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{k} > \frac{1}{2} \quad \text{tj.}$$

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{k} \quad \text{tj} \quad k<6$$

Prema tome vrijednosti za brojeve p i k su:

$p=3 \quad k=3$
$p=3 \quad k=4$
$p=3 \quad k=5$
$p=4 \quad k=3$
$p=5 \quad k=3$

Pomoću ovih vrijednosti najprije dobijemo vrijednosti ivica, a zatim stranica i vrhova.
Otuda slijedi da postoji samo 5 pravilnih poliedara koje nose nazive prema broju strana. To su: tetraedar, oktaedar, kosaedar, heksaedar i dodekaedar.

p	k	i	v	s	tip poliedra
3	3	6	4	4	tetraedar
3	4	12	6	8	oktaedar
3	5	30	12	20	ikosaedar
4	3	12	8	6	heksaedar
5	3	30	20	12	dodekaedar

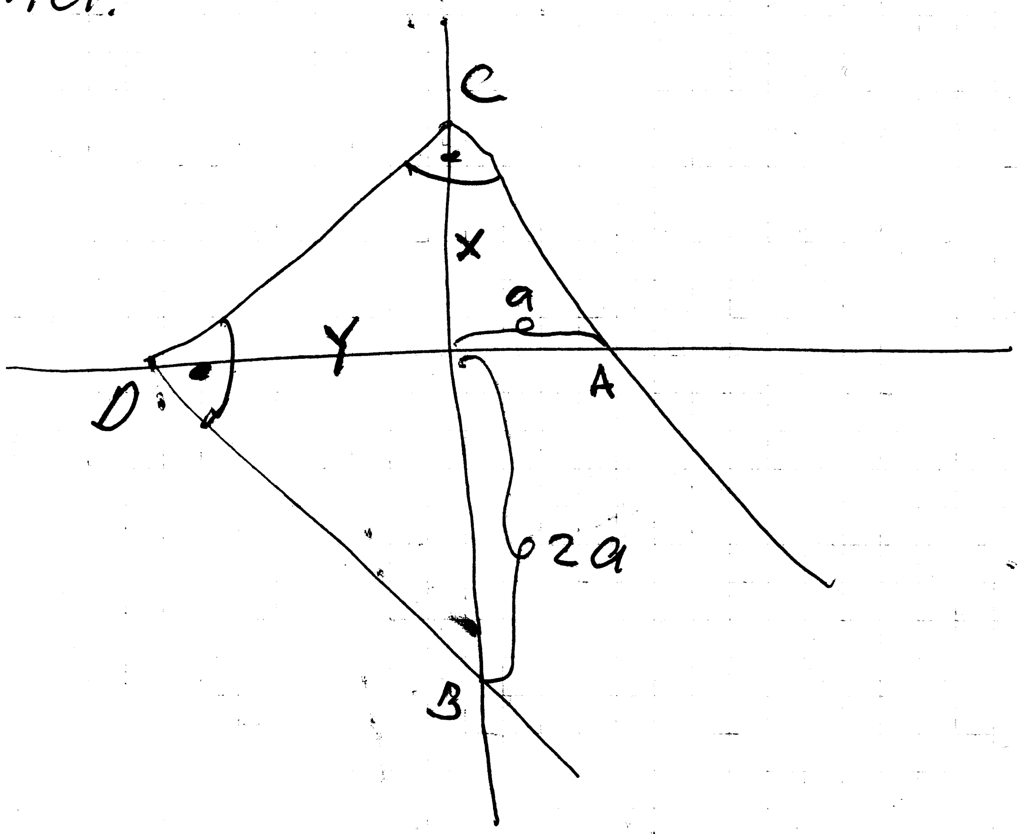
Konstruktivni zadaci

Da bismo objasnili smisao konstruktivnog zadatka sjetimo se najjednostavnijeg zadatka: Naći tačku koja je jednako udaljena od dvije date tačke. U ovom zadatku date su dvije tačke tj. dat je neki skup tačaka. Traži se skup tačaka sa osobinom da je svaka tačka toga skupa jednako udaljena od datih tačaka A i B. Taj smo zadatak riješili tako što smo konstruisali simetralu duži AB. Dakle na osnovu datih skupova tačaka konstruisali smo nove skupove tačaka koji u potpunosti odgovaraju traženu figuru. Pri tome smo se poslužili poznatom teoremom iz geometrije. Pri rješavanju drugih konstruktivnih zadataka poslužit će nam neke druge pomoćne figure: prave, kružnice, presječna tačka dvijeh pravih, zajedničke tačke prave i kružnice, zajedničke tačke dvijuh kružnica. Pri tome se služe sprava koje zovemo lenjir i šestar. Zbog toga se ovakve konstrukcije i zovu konstrukcije lenjirom i šestarom ili geometriske konstrukcije. Ako se u zadatku ne navode sprave pomoću kojih treba riješiti konstruktivni zadatak, onda su to lenjir i šestar. Sad ćemo

dati definicije ovih instrumenata.
Lenjir je sprava pomoću koje se može konstruisati prava koja prolazi kroz dvije određene tačke.
Šestar je sprava pomoću koje ~~se~~ se može konstruisati kružnica kojoj su dati centar i radijus. U geometriskim konstrukcijama smatramo da imamo na raspolaganju samo lenjir i samo šestar i da ih možemo upotrijebiti samo onako kako je to navedeno u njihovim definicijama. Ovakvo ograničenje za upotrebu sprava kojima se služimo pri rješavanju konstruktivnih zadataka postavio je poznati grčki filozof i matematičar platon. Uz ovakva ograničenja tri čuvena grčka konstruktivna zadatka nemogu se riješiti:
1. Udvostručenje ili duplikacija kocke.
Data je kocka. Treba konstruisati drugu kocku čija je zapremina dva puta veća od zapremine date kocke.
2. Trisekcija ugla. Dati ~~je~~ proizvoljan ugao podijeliti na tri jednaka dijela.
3. Kvadratura kruga. Dat je krug. Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka površini datog kruga.

1.

Zadana je kocka ivice a. Treba konstruisati kocku ivice x tako da je $x^3 = 2a^3$ tj. $x = a\sqrt[3]{2}$. Nerješivost ovog zadatka upotrebom lenjira i šestara dokazao je matematičar Vancel (Vantzel) 1837 god. No još je sam Platon pokazao kako se ovaj zadatak može riješiti upotrebom dva prava ugla. Na uzajamno normalnim pravim čija je presječna tačka O uzete su duži $OA \cong a$ i $OB \cong 2a$ kao na slici.



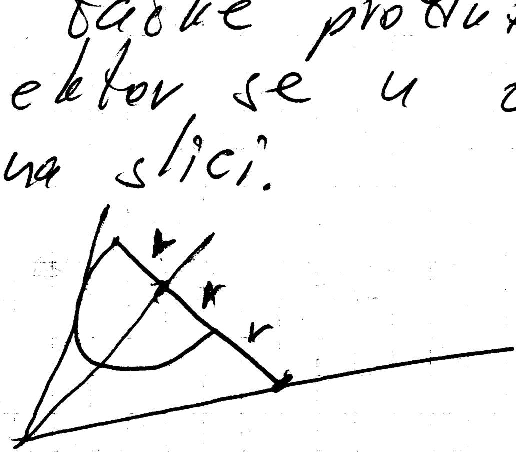
Dva prava ugla postave se kao na slici. Ako jednog pravog ugla označimo sa C a drugog sa D onda imamo pravougle trouglove $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$. U prvom duž $OC \cong x$ je visina na hipotenuzu pa je $x^2 = a \cdot y$ gdje je y visina na hipotenuzu u trouglu ΔBCD. Na isti način je $y^2 = x \cdot 2a$. Sada je $x^4 = a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot x \cdot 2a$

$$= x \cdot 2a^3 \quad \text{odnosno} \quad x^3 = 2a^3 .$$

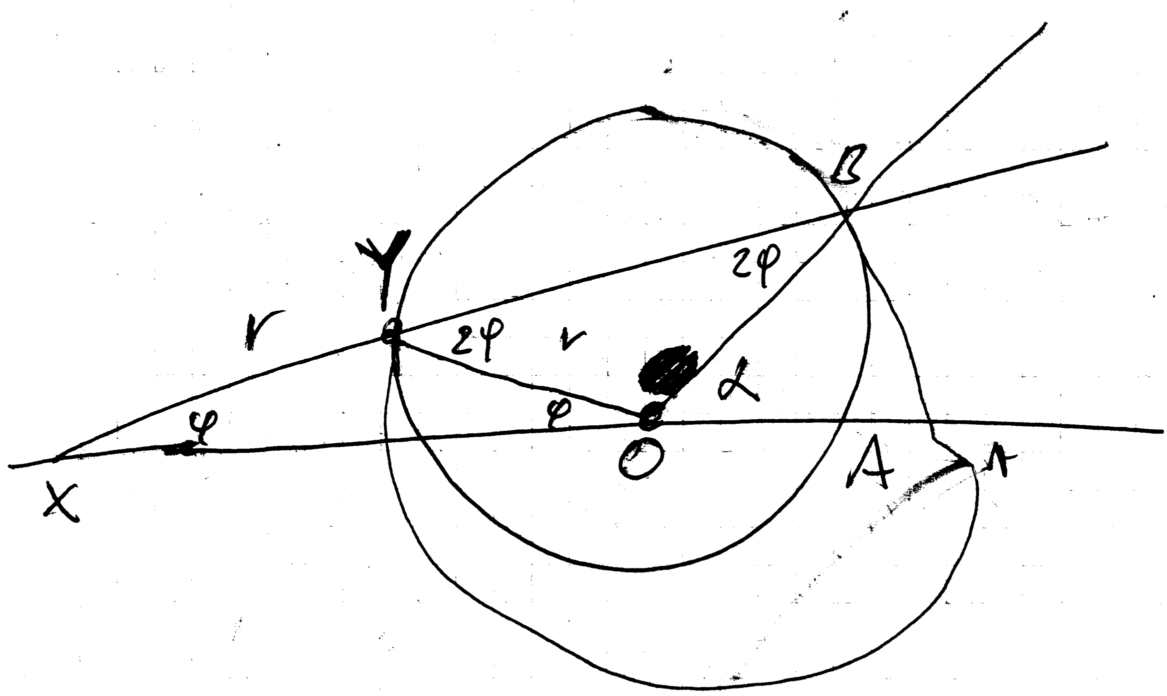
Smatra se da je ovaj problem nastao na otoku Delosu. Na Delosu je izbila kuga i od Delfiskog proročišta je traženo da se kuga zaustavi. Na taj zahtjev proročice su tražile da se zapremina postojećeg žrtvenika udvostruči a da mu se ne naruši oblik.

2.

Također nerješivost ovog zadatka upotrebom lenira i šestara dokazao je Vancel 1837. No s druge strane postoje sprave pomoću kojih se može dati ugao podijeliti na tri jednaka dijela. Jedna takva sprava zove se trisektor. Sastoji se od polukružnice radijusa r u čijoj je jednoj krajnjoj tački povučena poluk tangenta a radijus je preko te tačke produžen je za svoju dužinu. Trisektor se u odnosu na ugao postavi kao na slici.



Ovaj zadatak može se riješiti upotrebom "lenjira i šestara" sa fiksiranim dvijema tačkama na lenjiru. Neka je α ugao koji treba podijeliti na tri jednaka dijela. Vrh O ugla α uzmimo kao centar kružnice proizvoljnog radijusa r. Ona krakove ugla siječe u tačkama A i B. Na lenjiru fiksiramo dvije tačke X i Y tako da je duž $XY \cong r$. Lenjir treba postaviti tako da prolazi kroz tačku B da tačka Y pripada ovoj kružnici a tačka X pravoj OA. Uočimo trougao $\triangle XOY$. Pošto je $XO \cong YO \cong r$ taj je trougao jednakokrak pa je $\sphericalangle YXO \cong \sphericalangle YOX$ označimo ga kraće sa φ.



I trougao $\triangle BOY$ je također jednakokrak a $\sphericalangle OYB$ je vanjski ugao trougla XOY pa je $\sphericalangle OYB = 2\varphi$ tj. $\sphericalangle OBY = 2\varphi$.
Ugao $\sphericalangle AOB$ je vanjski ugao za trougao $\triangle OBX$ pa je jednak zbiru dva unutrašnja

njemu nenapovedna ugla tj. ugao ∢AOB je $\varphi + 2\varphi = 3\varphi$. Odavde $\varphi = \frac{1}{3}\alpha$

3.

Treba dakle kostruirati kvadrat stranice x tako da je $x^2 = r^2\pi$. Ako kao i uvijek uzmemo da je $r = 1$ dobijamo $x^2 = \pi$ tj $x = \sqrt{\pi}$. Ovaj se zadatak suštinski razlikuje od prethodna dva jer je π transcententan broj. Lindeman je 1882 dokaza da je π transcententan broj i iz tog dokaza slijedi da se ovaj zadatak nemože riješiti upotrebom lenjira i šestara. No poznato je da se zadatak o kvadraturi kruga može riješiti ako se koriste neke transcendentne krive. Jedna takva kriva je kvadratisa. Njena jednačina u pravouglom kordinatnom sistemu glasi $y = x \cdot ctg\frac{\pi x}{2r}$

gdje je r radijus kružnice sa centrom u kordinatnom početku.
Ako se pusti da x teži 0 $(x \to 0)$ onda dobijemo:

$$y_0 = \frac{2r}{\pi} \quad \text{tj.} \quad \pi = \frac{2r}{y_0}$$

i kad se uštoma dobijemo

$$\frac{2r\pi}{2r} = \frac{2r}{y_0} \quad \text{odakle se}$$

$2r\pi$ dobije ka izvurba propacionalnost. S druge strane $r^2\pi$ uvijek se može napisati u slijedećem obliku:

$$r^2\pi = 2r\pi \cdot \frac{r}{2}$$ tj. površina kruga

jednaka je površini trougla čija je osnovica $2r\pi$ a visina $\frac{r}{2}$.

Veoma je važno u vezi sa prethodnim primjedbama slijedeće: Da bismo uopšte vidjeli koji se zadaci mogu riješiti upotrebom lenjira i šestara treba rješavanje ovih zadataka prevesti na problem analitičke geometrije. Naime rješavanje konstruktivnih zadataka svodi se na traženje zajedničkih tačaka dvije prave, prave i kružnice i dvije kružnice.

U analitičkoj geometriji prava je predstavljena linearnom jednačinom a kružnica kvadratnom. Zbog toga se rješavanja konstruktivnih zadataka u analitičkoj geometriji svodi na:

1. rješavanje dvije linearne jednačine
2. rješavanje kvadratne i linearne jednačine
3. rješavanje dvije kvadratne jednačine.

Slučaj dva svodi se na rješavanje kvadratne jednačine a slučaj tri svodi se na slučaj dva. Za presječne tačke analitički se uvijek dobije racionalan izraz pod kojem figuriraju

četri osnovne operacije: sabiranje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i uzastopno kvadratni korijen. Takav izraz uvijek se može konstruisati pomoću lenjira i šestara.
Najpoznatije metode rješavanja konstruktivni zadataka su:
metod geometrijskog mjesta tačaka
metod geometrijskih transformacija
i algebarski metod.

Četri etape u rješavanju konstruktivnih zadataka

Jedan konstruktivni zadatak je riješen ako su provedene sve četri etape u rješavanju tog zadatka:
1. Analiza
2. Konstrukcija
3. Dokaz
4. Determinacija ili Diskusija.

Analiza

U ovoj etapi nastojimo da pronađemo put do rješenja zadatka. Pretpostavljamo da je zadatak riješen i nastojimo naći vezu između rješenja i postavljenih uslova. Obično nacrtamo figuru za koju uzmemo da zadovoljava uslove našeg zadatka pa nastojimo na osnovu teorema koje su dokazane u geometriji i jednostavnih zadataka koje smo prethodno riješili naći vezu simetrije rješenja zadatka o postavljenih uslova. Ponekad je potrebno da naš crtež dopunimo pomoćnim figurama. Dakle mi u analizi polazimo od rješenja zadatka no da ~~bismo~~ bismo dobili rješenje nama je potreban obrnuti smjer zaključivanja koji je od postavljenih uslova dovodi do rješenja.

Konstrukcija

Poslije dobro provedene analize postaje jasno koje sve konstruktivne zadatke i kojim redom treba izvršiti da bismo dobili rješenje. Dakle u ovoj drugoj etapi navodimo, i to tačno redom koje figure treba konstruisati da bi dobili traženu figuru. Pri tome je dobro da sve ovo pratimo odgovarajućim crtanjem.

Dokaz

Za figuru koju smo dobili i za koju tvrdimo da je rješenje našeg zadatka treba to i da dokažemo. Treba dokazati da figura koja je dobijena prema opisu iz tačke dva odgovara svim postavljenim zahtjevima

Ovdje je važno primijetiti sljedeće. Pri površnom razmatranju ova etapa može izgledati suvišno. Naime, nama se čini da već iz analize i konstrukcije slijedi da dobijena figura zadovoljava postavljene uslove. Ne treba zaboraviti da je zaključivanje u konstrukciji obratno ~~a~~ zaključivanju u analizi.

Determinacija (diskusija)

Elementi ili odrednice konstruktivnog zadatka obično se daju općenito. To jest mi pretpostavljamo da mogu biti ma kakvi. Zato vršimo determinaciju zadatka tj. ispitujemo u kojim slučajevima će zadatak imati rješenje, u kojim neće i koliko će imati rješenja. U determinaciji treba da imamo na umu sve one teoreme u kojima se govori po uslovima pod kojima će naš zadatak imati rješenje. ~~[illegible]~~

Zadatak se smatra riješenim kad su provedene sve četri navedene etape.